$y''=1+\sqrt{1-x^2}$, or $y\in[0,1]$ donc la solution valable est $y'=1-\sqrt{1-x^2}$ car $y''\geq 1$ donc $\forall x\in[0,1]$, $\varphi^{-1}(x)=1-\sqrt{1-x^2}$.

Solution 15 :

1°/ g est définie, continue et dérivable sur $\mathbf{R}$ et $\forall x\in\mathbf{R}$, $g'(x)=3x^2+12$. On a $\forall x\in\mathbf{R}$, $g'(x)>0$ d'où :

x	$-\infty$		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	
$g(x)$	$-\infty$	↗	$+\infty$

2°/a) g est continue et strictement croissante sur $\mathbf{R}$ donc g réalise une bijection de $\mathbf{R}$ sur $\mathbf{R}$ et comme $0\in\mathbf{R}$ donc 0 admet un seul antécédent α par g ce qui prouve qu'il existe un seul réel α tel que $g(\alpha)=0$. D'autre part on a $g(0)\cdot g(1)<0$ et g est continue sur $[0,1]$ donc $0<\alpha<1$.

b) D'après le tableau des variations de g on a :

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$g(x)$	$-\infty$	↗	0	↗	$+\infty$

d'où le tableau de signe de $g(x)$:

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	

3°/a) f est définie sur $\mathbf{R}$ et f est une fonction rationnelle donc f est dérivable sur $\mathbf{R}$.

$\forall x\in\mathbf{R}$,

$$f'(x)=\frac{3x^2(x^2+4)-2x(x^3+1)}{(x^2+4)^2}=\frac{x(x^3+12x-2)}{(x^2+4)^2}=\frac{x\cdot g(x)}{(x^2+4)^2}$$